

Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

**APLICACIONES SOBRE LA
MODELACIÓN, LA
VISUALIZACIÓN Y USO DE
REPRESENTACIONES EN LA ERA
NUMÉRICA**

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

México

César Fabián Romero Félix

Universidad de Sonora

México

Fernando Hitt Espinosa

Université du Québec à Montréal

Canada.

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y
uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F.
(Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro “El Infinito en un Junco” inicia su obra diciendo:

“Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente”

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona “La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción”.

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encuentres en este libro beneficios.

El libro *“Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica”* es la parte práctica del libro anterior llamado *“Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica”*, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro *“Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica”*. Pérez menciona lo siguiente:

“El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión “En la Era Numérica”), que se entrecruza con los tres primeros.”

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA¹ y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Gráficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

¹ ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM² no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

² Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1:	Señalización para Protección Civil	1
	Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C.	
Capítulo 2:	Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble	29
	Christian Boissinotte	
Capítulo 3:	Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones	49
	José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix.	
Capítulo 4:	Horas de luz solar	63
	Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez.	
Capítulo 5:	Caminando frente al sensor de movimiento	73
	Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 6:	Gráficas dinámicas ligadas	83
	Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 7:	Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales	91
	Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.	
Capítulo 8:	Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización	101
	José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera.	
Capítulo 9:	Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones	125
	César Fabián Romero Félix	
Capítulo 10:	Situación 1: Estimando la temperatura	149
	María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 11:	Antenas telefónicas	162
	María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 12:	Visualización matemática y GeoGebra	173
	Fernando Hitt	
Capítulo 13:	Nociones de Aproximación y Tendencia	179
	Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.	
Capítulo 14:	Le Jardin des Citrouilles	187

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia

Actividades didácticas

Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.¹

Problemática y propósitos de aprendizaje

El planteamiento de estas actividades tiene como propósito que los estudiantes comprendan las nociones de aproximación y tendencia de manera dinámica, con el fin de lograr un acercamiento a la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Aproximación, tendencia, límite de una función en un punto.

Específicos: Variables, razones trigonométricas, circunferencia, representación de funciones, ecuación de la recta.

Nivel de estudios

Último grado de bachillerato y primer semestre universitario (16 a 17 años).

Total de actividades y duración aproximada

5 actividades, para realizarse en un total de 2 sesiones de 90 minutos cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante.
- Applet de GeoGebra para las actividades 2 y 3.
- Un equipo de cómputo con GeoGebra para cada estudiante. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 5.

Método o recomendaciones de enseñanza

El diseño de las actividades toma como referencia los aspectos metodológicos planteados por Fiallo y Parada (2018). Las actividades están organizadas secuencialmente, alrededor de uno o dos problemas. La secuencia promueve el trabajo individual, el trabajo en equipo y el debate en el aula, al igual que la manipulación de medios computacionales con el trabajo realizado a lápiz y papel. La secuencia de actividades presenta una estructura intencional que responde a las siguientes fases: exploración libre, socialización de los resultados obtenidos, exploración dirigida, explicación y por último una tarea retadora. Dichas fases se evidencian en el planteamiento de cada actividad:

- **Actividad 1 (Información y exploración libre):** Esta actividad tiene como objetivo identificar la comprensión del estudiante acerca de la noción de aproximación, allí el

¹ Universidad Industrial de Santander, Colombia.

estudiante utiliza sus pre saberes y de manera intuitiva busca resolver el problema (tiempo estimado: 10 a 15 minutos).

Luego de que los estudiantes realicen la exploración del problema, en la fase de socialización de resultados, el docente debe promover la participación de los estudiantes con el propósito de que ellos comuniquen sus soluciones, las discutan en grupo, expongan las diferentes soluciones y presenten sus argumentos que han utilizado para resolver la situación planteada (tiempo estimado: 15 a 20 minutos).

- **Actividad 2 (Exploración dirigida):** Esta actividad consta de 2 partes y cada una se realiza con la exploración de un archivo en GeoGebra. Además, se hace una orientación guiada mediante preguntas para que el estudiante vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados percibidos en las diferentes representaciones que le ofrece el software.

La primera parte de esta actividad pretende ilustrar la noción de aproximación, esto se hace mediante un archivo de GeoGebra “Act_2_1.ggb” en el cual aparece un deslizador y al manipularlo controladamente, en la pantalla se visualiza que los puntos que están apareciendo (en color verde) están cada vez más próximos del punto rojo, esta actividad permite que el estudiante identifique que es posible aproximarse a un punto a partir de la disminución de la distancia entre ambos puntos, comparando cada una de las magnitudes respecto a la anterior.

En la segunda parte, se utiliza el archivo “Act_2_2.ggb” donde se espera que lo primero que el estudiante observe sean “tres puntos” sobre la recta numérica, un punto rojo en medio de dos puntos negros. Luego, mediante el zoom (generado al mover controladamente el deslizador “m”) se pretende que el estudiante identifique la existencia de otros puntos a izquierda y derecha del punto rojo (sucesión finita de puntos). Respecto a lo anterior se espera que el estudiante pueda comprender y justificar matemáticamente que siempre es posible construir un punto más próximo al punto rojo tanto por izquierda como por derecha.

- **Actividad 3 (Exploración dirigida):** En esta actividad se pretende que surja de manera natural la idea de límite, lo que debe ser aprovechado para empezar a discutir este concepto de manera dinámica a través de la aproximación y la tendencia. Se utiliza el archivo “Act_3_1.ggb” con el fin de observar cómo el estudiante decide sobre la existencia de las razones trigonométricas $\sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° .

De igual manera, se busca que el estudiante decida sobre la tendencia de las razones trigonométricas $\sen(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° . Respecto a la tendencia de los valores tomados por las razones trigonométricas, se debe tener en cuenta que no es fácil que el estudiante analizando

algunos casos pueda identificar los valores que pueden tomar cada una de las razones. Esto se debe, entre otras cosas, a las limitaciones del software, porque los valores observados son finitos y las razones tienden a $0, 1, -1, -\infty, \infty$ según las cifras decimales (los estudiantes se pueden apoyar de la hoja de cálculo registrando por ejemplo 20 datos). Por ello, se debe solicitar a los estudiantes aproximarse más a los ángulos cuadrantales, para evidenciar que entre más aproximaciones se hacen a estos ángulos, los valores siguen aumentando o disminuyendo (cuando tienden a infinito o menos infinito) o tienden a $0, 1$ o -1 .

- **Actividad 4 (Exploración dirigida):** Esta actividad tiene como objetivo que los estudiantes establezcan aproximaciones a " x " (un punto en el dominio de la función por izquierda como por derecha). Además, se espera que relacionen esas aproximaciones con la tendencia de $f(x)$ a través del registro numérico (a partir de una tabla de valores para $(x_i, f(x_i))$) y la representación gráfica, con el fin de analizar si existe el límite de una función en un punto.

Se pretende que los estudiantes logren identificar las tendencias de la variable independiente y las de la variable dependiente, mejorando las aproximaciones en el sentido de ir buscando la aproximación que indique la existencia de tendencia a medida que coinciden las aproximaciones laterales.

Al finalizar el desarrollo de cada una de las actividades propuestas en los incisos 2, 3 y 4 se realiza la fase de explicación de lo esperado en cada una de ellas. La intención de esa fase es promover el debate, la discusión y la reflexión de las ideas expuestas de manera que se llegue al objetivo de cada actividad.

- **Actividad 5 (Tarea retadora):** Se realiza el planteamiento de una situación contextualizada donde se espera que el estudiante aplique lo aprendido con el desarrollo de la secuencia. El propósito de esta actividad es identificar si el estudiante comprende cuáles son las variables de la situación, y cómo él interpreta la relación entre la aproximación y tendencia, que se genera al variar " r " de la circunferencia C_2 con la ubicación del punto " R " en el plano cartesiano. El estudiante en esta actividad podría utilizar herramientas de la geometría analítica para resolver la situación y apoyarse de GeoGebra para observar la situación de forma dinámica.

Referencias

Fiallo, J., y Parada, S. (2018). *Estudio dinámico del cambio y la variación*. Colombia: Universidad Industrial de Santander.

Actividad 1: Exploración libre

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

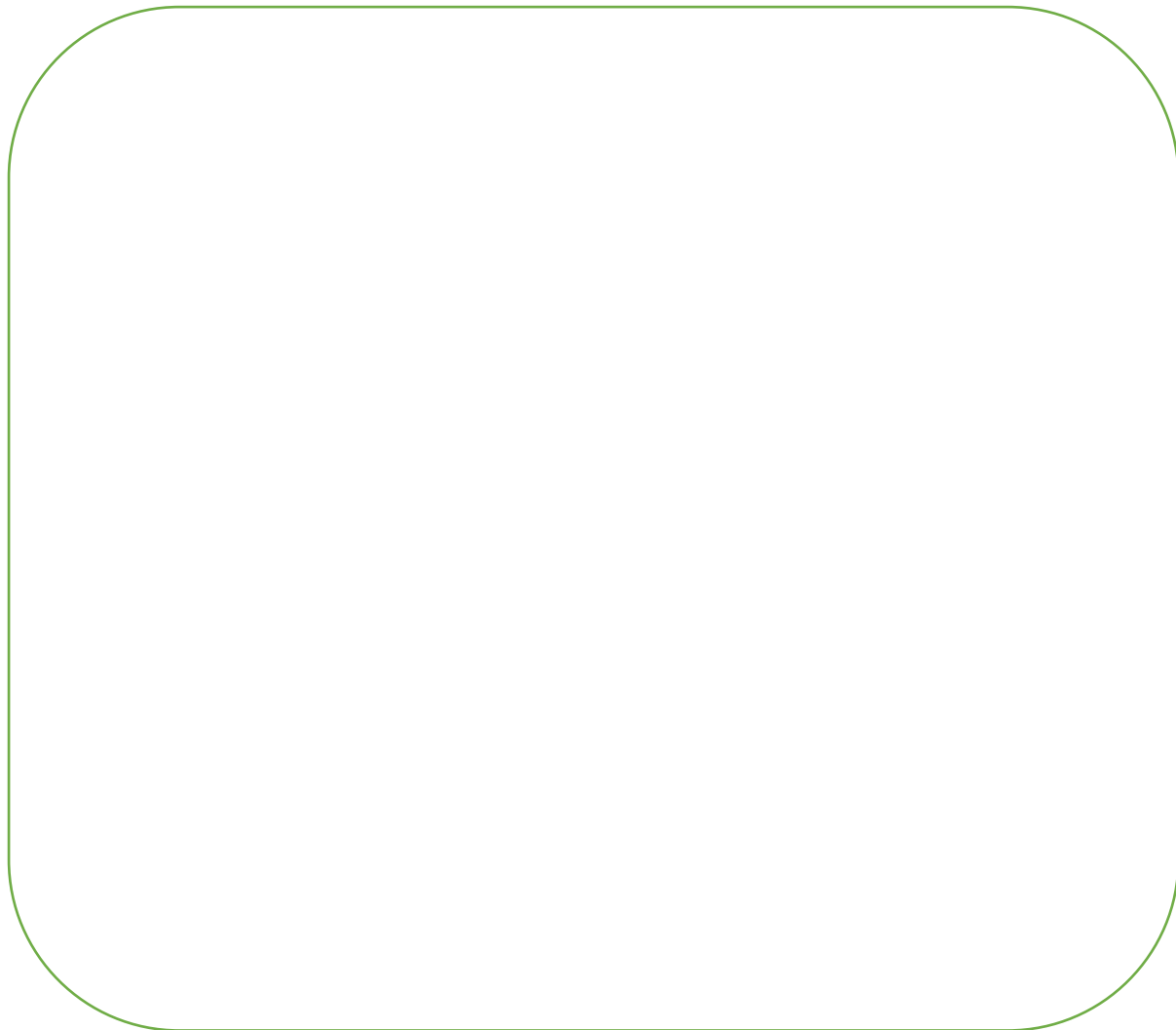
INSTRUCCIONES

Conteste las preguntas y realice lo que se solicita en cada una de las actividades en las hojas de trabajo.

1.1. Considere los siguientes valores $\frac{501}{100}, \frac{5001}{1000}, \frac{50001}{10000}, \frac{500001}{100000}, \dots$ para la variable a , y $\frac{499}{100}, \frac{4999}{1000}, \frac{49999}{10000}, \dots$ para la variable b .

- a) ¿A qué valor se aproximan las variables a y b ? **Justifique** su respuesta.
- b) ¿Qué relación existe entre la variable a y la variable b ? **Justifique** su respuesta.

1.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.



Actividad 2: Nociones de Aproximación y Tendencia

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

2.1. Abra el archivo **Act-2.1.ggb** y use el deslizador “a” para explorar la construcción.

- a) ¿Describa el comportamiento de los puntos verdes A_n respecto al punto rojo A ?
- b) ¿Qué sucede con la distancia de cada punto verde A_n respecto al punto rojo A ?
- c) ¿Qué concluye del comportamiento de los puntos verdes A_n respecto al punto rojo A ?
Justifique su respuesta.

2.2. Abra el archivo **Act-2.2.ggb** y responda la primera pregunta antes de utilizar el deslizador.

- a) ¿Qué observa sobre la recta numérica?
- b) Deslice el punto “m” solo con la tecla ← y describa lo que observa.
- c) ¿Cambió su opinión con lo observado inicialmente? **Justifique** su respuesta.
- d) ¿Se puede construir un punto más próximo del punto rojo? ¿Existe otro? ¿Es único? ¿Cuántos puntos se pueden construir más próximos al punto rojo? ¿Por qué? **Justifique** su respuesta.
- e) ¿Qué sucede si se construyen más puntos próximos al punto rojo? **Justifique** su respuesta.

2.3. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.

Actividad 3: Aproximación y Tendencia en el plano

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

3.1. Abra el archivo **Act-3.1.ggb**, y mueva el punto P en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de la circunferencia.

- a) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $\text{sen}(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α es igual a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° ? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.
- b) ¿Qué ocurre con cada una de las razones trigonométricas $\text{sen}(\alpha)$, $\tan(\alpha)$, $\sec(\alpha)$ cuando el ángulo α se aproxima a 0° , 90° , 180° , 270° y 360° ? **Explique** lo que ocurre **justificando** con argumentos matemáticos.

3.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.



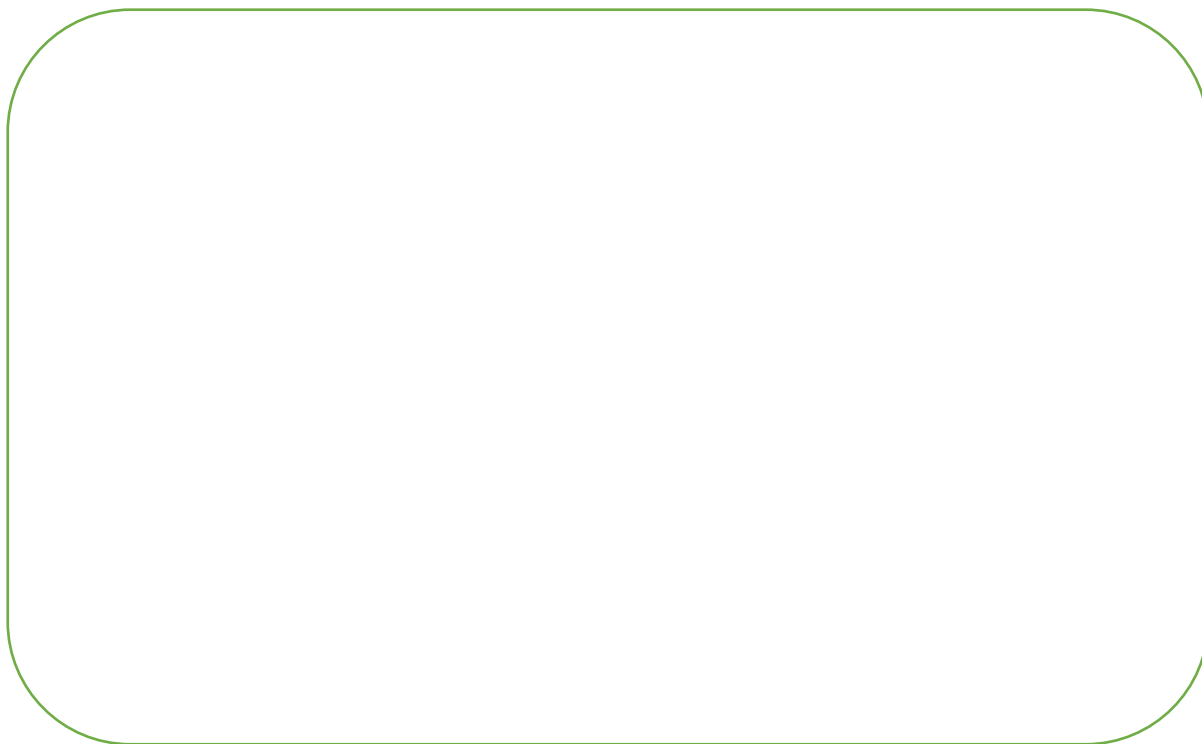
Actividad 4: Límite de una función en un punto

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

4.1. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$

- a) Abra GeoGebra y en la hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la izquierda y dibuje en rojo los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
- b) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por izquierda? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
- c) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable " x " se aproxima a 3 por la izquierda? **Justifique** su respuesta
- d) En la misma hoja de cálculo realice una tabla con los valores de x y $f(x)$ cuando la variable x toma valores en el dominio próximos a $x = 3$ por la derecha y dibuje en azul los puntos $(x, f(x))$ en el plano cartesiano.
- e) ¿Qué valores utilizó cuando hizo la aproximación a $x = 3$ por derecha? ¿Qué sucede con la distancia de cada uno de los valores que utilizó respecto a $x = 3$?
- f) ¿Hacia qué valor tiende $f(x)$, cuando la variable " x " se aproxima a 3 por la derecha? **Justifique** su respuesta.
- g) Cuando nos aproximamos a $x = 3$. ¿A qué valor tiende $f(x) = x^2 - 1$? **Justifique** su respuesta.

4.2. Socialice y compare sus conclusiones con las de sus compañeros.



Actividad 5: Tarea Retadora

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

5.1. En la Figura se muestra una circunferencia C_1 con ecuación $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ y una circunferencia C_2 que se contrae, con radio r y centro en el origen. P es el punto $(0, r)$, Q es el punto superior de intersección de los dos círculos y R es el punto de intersección de la recta PQ y el eje x . ¿Qué le sucede a R al contraerse C_2 ; es decir cuándo r se aproxima a 0 ?

